

Même en Première S, un élève peut se demander « à quoi servent » les définitions qu'il doit noter et les exercices de mathématiques qu'il doit exécuter.

Face à ce questionnement, et pour conforter le rôle de notre Ecole dans la société actuelle, les professeurs cherchent à montrer que les savoirs enseignés permettent de comprendre des évènements du monde qui nous entoure.

L'IREM de Poitiers a cherché à organiser la progression de 1<sup>ère</sup> S de manière à donner du sens aux contenus à enseigner. Pour cela, nous avons fait en sorte que les élèves rencontrent les notions à l'occasion de questions scientifiques, historiques ou contemporaines, liées à la « vie de tous les jours » ou davantage internes aux mathématiques.

En 2011-2012, la mise en œuvre du programme de première S par quelques membres de l'IREM a ainsi été basée sur l'étude d'une petite dizaine de « parcours » :

- 1) Comment résoudre une équation ?
- 2) Comment déterminer une tangente (ou une normale) à une courbe ?
  - a. Comment se réfléchit un rayon lumineux sur une surface ?
  - b. Comment se raccordent des routes ?
- 3) Comment décrire un déplacement ?
- 4) Comment optimiser une quantité ?
- 5) Comment modéliser un phénomène périodique ?
- 6) Comment calculer des distances (inaccessibles) et des angles ?
- 7) Comment prévoir l'évolution de la population mondiale ?
- 8) Comment calculer ses chances de gagner au jeu et estimer ses gains ?
- 9) Comment élaborer un test sensoriel ?

On aura remarqué que les questions ne sont pas toutes de même nature ; nous en débattons encore au sein de l'IREM !

Certaines de ces questions nous ont permis de traiter tous (ou presque tous) les contenus du programme de Première S sur une même notion (les suites par exemple avec la question 7). D'autres nous ont conduites à travailler, dans un même parcours, des notions figurant traditionnellement dans des chapitres bien distincts (équations de droite, de cercle, de parabole, et nombre dérivé avec la question 2).

Organiser les contenus autour de questions permet de rencontrer les notions au moment le plus opportun possible, mais également de les réinvestir ultérieurement (le nombre dérivé avec les questions 2 et 4)

Chaque question est travaillée lors d'un parcours, qui a peu de points communs avec un chapitre classique ; Un parcours possède plusieurs caractéristiques fondamentales :

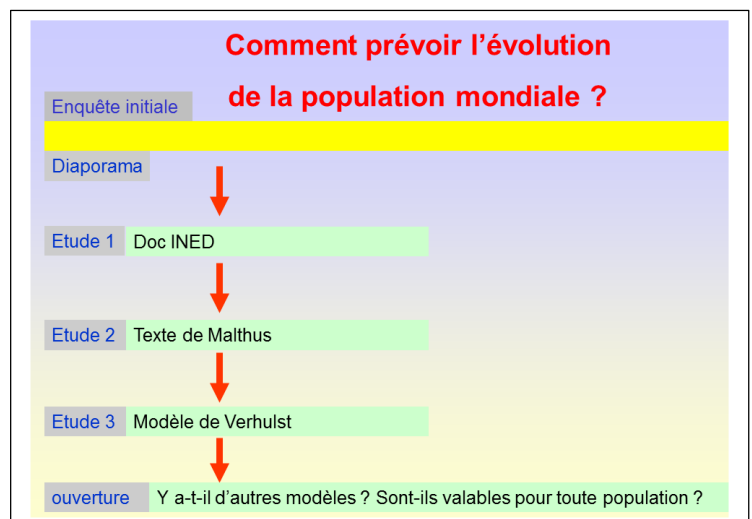
- Une question est à l'origine du parcours, et les contenus qui seront enseignés devront pour la plupart contribuer à répondre à la question.
- Le parcours peut démarrer par une enquête que les élèves devront mener, pour se familiariser avec la question. Il s'agit de voir ce que la question évoque a priori pour eux.
- Le parcours est balisé par plusieurs activités ou « études » qui ont ceci de particulier
  - qu'elles évoquent obligatoirement la question du parcours
  - qu'elles feront émerger une nouvelle technique ou une nouvelle notion qu'il faudra étudier dans le cours de mathématiques

Ainsi, la contrainte est double pour ces études : ne pas être déconnectées de la question, et avoir un intérêt dans l'avancée de la construction des connaissances.

Entre les études (en bleu dans le texte), on écrira le cours et des synthèses de méthode et les élèves feront bien sûr des exercices dont la technique ou les sujets seront naturellement en lien avec ce qui aura été fait dans l'étude précédente.

Nous espérons développer chez les élèves des compétences d'engagement dans une activité de recherche ; nous avons également l'ambition de les former à une compréhension plus profonde des concepts en montrant leur fonctionnalité.

Dans l'article qui suit, nous allons présenter le parcours lié à la question 7, notamment les trois études, moments fondamentaux qui articulent le parcours, plus brièvement ce sur quoi on synthétise (cours et méthodes) et enfin le type d'exercices travaillés.



Nous évoquerons également la gestion telle que nous l'avons expérimentée avec trois classes en 2011-2012. Le parcours s'appuie sur l'étude d'une animation du site de l'INED, et sur un texte historique de Thomas Robert Malthus (1798). A travers l'étude de l'évolution des populations, les élèves étudient différents modèles permettant de faire des prévisions. Ce parcours nous a permis de traiter les suites arithmétiques et géométriques, leur variation, et évoquer leur limite éventuelle.

# Comment prévoir l'évolution de la population mondiale

## Étude 1 : Etude d'un document de l'INED.

1. Animation de l'INED à l'adresse suivante :

[http://www.ined.fr/fr/tout\\_savoir\\_population/animations/population\\_mondiale/](http://www.ined.fr/fr/tout_savoir_population/animations/population_mondiale/)

2. Noter les nombres annoncés dans l'animation et les vérifier en répondant aux questions suivantes :

- Calculer le nombre d'habitants supplémentaires par an et le comparer au nombre avancé dans le document de l'INED.
- Vérifier qu'au rythme évoqué pour l'année 2005, cela fait une augmentation annuelle de 1,2%.
- Comment vérifier que la population double en plus de 60 ans ?

3. Ci-dessous la population mondiale, en milliards, de 1800 à 2011.



Année	1800	1927	1960	1974	1987	1999	2011
Population (en milliards)	1	2	3	4	5	6	7

- Calculer le taux d'accroissement moyen annuel entre 1800 et 1927.
- Comparer les taux d'accroissement moyens annuels penant chaque période donnée dans le tableau.

Cette première étude commence par l'écoute, durant 12 min, du document entier de l'INED. Les élèves peuvent prendre des notes mais ne posent pas encore de questions. Ils ont été prévenus qu'ils seront amenés à réentendre certaines parties du document pour les étudier. Ce premier temps est suivi d'un court échange entre les élèves sur ce qu'ils ont compris et retenu. La partie « croissance démographique aujourd'hui » est réécoutée en premier afin de vérifier toutes les données.

**Vérifications** :  $2 \times 60 \times 60 \times 24 = 172\ 800$  nouveaux habitants par jour arrondi à 200 000 dans le document.

$200\ 000 \times 365 = 73\ 000\ 000$  nouveaux habitants par an arrondi à 75 000 000 dans le document. Cela fait, en proportion  $\frac{75\ 000\ 000}{6\ 500\ 000\ 000} = 1,15\%$ . Le document parle de 1,2% d'augmentation par an.

Ces calculs donnent lieu à une discussion sur les approximations utilisées dans cette vidéo tout public. La donnée importante sur laquelle nous nous arrêtons est l'augmentation annuelle de 1,2% de la population étudiée. Suit alors un travail sur les augmentations successives (taux d'évolution, coefficient multiplicateur, évolutions successives...).

Si la population mondiale augmente de 1,2% tous les ans alors elle est multipliée par  $(1 + 1,2\%)^{60} \approx 2$  en 60 ans.

Le libellé du programme de première S ne présente pas de contenus sur les proportions et les évolutions, il n'est donc pas question d'y passer un temps trop long mais ce travail permet d'aborder d'ores et déjà l'idée de progression géométrique (sans pour autant formaliser la notion) et d'utiliser pour la première fois les notations indiciaires. La question 3 amène de plus à résoudre l'équation  $(1 + x)^{127} = 2$ . Cela peut se faire avec un tableau de valeur de la fonction  $f(x) = (1 + x)^{127}$  ou bien avec la racine 127<sup>ème</sup>.

x	$(1 + x)^{127}$
0,20%	1,289
0,21%	1,305
0,22%	1,322
0,23%	1,339
0,24%	1,356
0,25%	1,373
0,26%	1,391
0,27%	1,408
0,28%	1,426
0,29%	1,445
0,30%	1,463
...	...
0,40%	1,660
0,41%	1,681
0,42%	1,703
0,43%	1,724
0,44%	1,746
0,45%	1,769
0,46%	1,791
0,47%	1,814
0,48%	1,837
0,49%	1,860
0,50%	1,884
0,51%	1,908
0,52%	1,932
0,53%	1,957
0,54%	1,982
<b>0,55%</b>	<b>2,007</b>
0,56%	2,032
0,57%	2,058
0,58%	2,084
0,59%	2,111
0,60%	2,138

---

## Étude 2 : Les prévisions malthusiennes

### 1) Faire une recherche documentaire sur Thomas-Robert Malthus et le malthusianisme.

Voir par exemple : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Malthusianisme>  
ou bien <http://www.toupie.org/Dictionnaire/Malthusianisme.htm>

### 2) Lecture et exploitation d'extraits du livre de Thomas-Robert Malthus : Essai sur le principe de population (1798) (voir le fichier Texte Malthus.pdf joint)

([http://classiques.uqac.ca/classiques/maltus\\_thomas\\_robert/essais\\_population/essais\\_population.html](http://classiques.uqac.ca/classiques/maltus_thomas_robert/essais_population/essais_population.html))

- Expliquer le calcul des lignes 59 et 61.
- Calculer le taux moyen annuel d'évolution dans les lignes 64 à 66.
- Comment interpréter l'expression « progression arithmétique » écrite à la ligne 100 ?
- Expliquer les calculs lignes 101 à 111.
- Expliquer les calculs lignes 115 à 118.

---

Dans le projet de l'IREM de Poitiers, certaines études peuvent être l'occasion de demander aux élèves de faire, devant la classe, un petit exposé. C'est le cas pour la seconde étude de ce parcours. Elle débute par un travail de recherche demandé aux élèves sur un économiste anglais du XVIII<sup>e</sup> siècle, Malthus, connu pour ces travaux sur les dynamiques de croissance de la population.

Elle continue avec l'étude d'un texte historique. La lecture de ce texte étant longue, ce travail est fait à la maison. Elle sera suivie d'un débat pendant lequel les élèves évoquent ce qu'ils ont retenu. Les notions de progression arithmétique et géométrique sont très vite abordées mais nécessiteront plus amples explications lors de l'étude d'autres passages du texte.

**Les lignes 59 à 61** par exemple doivent être reformulées et expliquées. Sur 36 personnes, 1 disparaît et 3 naissent : cela permet de parler de taux d'accroissement sous la forme fractionnaire ( $2/36$ ) ou bien décimale et pourcentage ( $0,0555 = 5,55\%$ ). On peut prendre une population initiale  $p$  et appliquer le coefficient multiplicateur annuel de  $1,0555$  pour retrouver qu'en 12 ans et  $4/5$  la population  $p$  sera presque doublée ( $1,0555^{12,8} \approx 2$ ).

**Dans le passage lignes 64 à 66**, figure la notion que l'on souhaite travailler (progression géométrique). Si on admet que la suite des valeurs données tous les 25 ans est géométrique de raison 2, on peut trouver le taux moyen annuel :  $2p = (1 + x)^{25} p$  soit  $2 = (1 + x)^{25}$ .

On peut, *ici*, procéder par essais et rectification sur le tableur ou à la calculatrice (On trouve  $0,0281$ ).

L'étude se poursuit avec la comparaison de la progression de la population et l'évolution des produits de la terre (nourriture).

Les élèves justifient assez bien pourquoi l'accroissement de la nourriture ne peut suivre celle de la population (place limitée, fertilité de la terre, fécondité du sol,...). Le texte nous explique (lignes 90 et suivantes), que chaque période de 25 ans ajoute à la production de la période précédente une quantité égale à sa production actuelle. Cela signifie que si on part d'une quantité  $q$ , tous les 25 ans, on a une production augmentée de  $q$  : ce qui donne  $q, 2q, 3q \dots$ . La suite de nombres est dite arithmétique. On passe d'un nombre au suivant en ajoutant toujours la même quantité.

Le professeur peut alors donner des exemples de suites arithmétiques et bien distinguer les suites géométriques des suites arithmétiques.

Pour expliquer et bien visualiser les calculs **des lignes 101 à 111**, on peut faire figurer dans le même tableau la suite de nombres correspondant à l'évolution de la population (qui double tous les 25 ans) et la suite des quantités de nourriture produites (ajout d'une même quantité tous les 25 ans).



Population	11 millions	22 millions	44 millions	88 millions	...
Nourriture	Pour 11 millions de personnes	Pour 22 millions de personnes	Pour 33 millions de personnes	Pour 44 millions de personnes	...

Les mêmes calculs et remarques sont évoqués dans **les lignes 115 à 118** en partant d'une population de 1 et d'une production de nourriture égale à 1 (nécessaire pour une population de 1). On peut alors remarquer les différences d'évolution au bout d'un siècle, deux siècles...



Population	1	2	4	8	16	32	64	128	256
Nourriture	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Cette étude se conclut par un bilan sur ce que l'on appellera à partir de maintenant des suites arithmétiques et des suites géométriques et on utilisera les notations indiciaires.

Pour la population, on notera  $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = k$  pour signifier que le taux d'évolution de la population reste constant. Cela pourra aussi être écrit sous la forme  $u_{n+1} = (1 + k)u_n$ .

A ce moment-là du parcours, on fait une synthèse sur les deux types de suites du programme. Les définitions sous forme récurrente et explicite des suites géométriques et arithmétiques sont données. On peut alors travailler des exercices très techniques sur le calcul de termes, de raison et sur la comparaison de ces deux types de suites. On peut aussi commencer à écrire quelques algorithmes pour calculer un terme de rang donné.

Exemple pour une suite arithmétique

1 VARIABLES	1 VARIABLES
2 u0 EST_DU_TYPE NOMBRE	2 u0 EST_DU_TYPE NOMBRE
3 r EST_DU_TYPE NOMBRE	3 r EST_DU_TYPE NOMBRE
4 n EST_DU_TYPE NOMBRE	4 n EST_DU_TYPE NOMBRE
5 DEBUT_ALGORITHME	5 i EST_DU_TYPE NOMBRE
6 AFFICHER "SUITE ARITHMETIQUE"	6 DEBUT_ALGORITHME
7 AFFICHER "Donner la valeur du premier terme : "	7 AFFICHER "SUITE ARITHMETIQUE"
8 AFFICHER "u0 = "	8 AFFICHER "Donner la valeur du premier terme : "
9 LIRE u0	9 AFFICHER "u0 = "
10 AFFICHER u0	10 LIRE u0
11 AFFICHER "Donner la valeur de la raison : r = "	11 AFFICHER u0
12 LIRE r	12 AFFICHER "Donner la valeur de la raison : r = "
13 AFFICHER r	13 LIRE r
14 AFFICHER "Donner le rang du terme que vous voulez calculer : n = "	14 AFFICHER r
15 LIRE n	15 AFFICHER "Donner le rang du terme que vous voulez calculer : n = "
16 AFFICHER n	16 LIRE n
17 u0 PREND_LA_VALEUR u0+n*r	17 AFFICHER n
18 AFFICHER "Votre terme est égal à "	18 POUR i ALLANT_DE 1 A n
19 AFFICHER u0	19 DEBUT_POUR
20 FIN_ALGORITHME	20 u0 PREND_LA_VALEUR u0+r
	21 FIN_POUR
	22 AFFICHER "Votre terme est égal à "
	23 AFFICHER u0
	24 FIN_ALGORITHME

## Étude 3 : Un autre modèle : celui de Verhulst

1. L'INED explique la transition démographique par des raisons de restrictions que les humains s'imposent (limitations économiques, éthiques, religieuses ou sociologiques).

Voici ce qu'en dit Quételet, démographe et mathématicien du XIX<sup>e</sup> <http://msh.revues.org/2893?file=1>  
« Il paraît incontestable que la population croîtrait selon une progression géométrique, s'il ne se présentait aucun obstacle à son développement. Les moyens de subsistance ne se développent point aussi rapidement, et, selon Malthus, dans les circonstances les plus favorables à l'industrie, ils ne peuvent jamais augmenter plus vite que selon une progression arithmétique. Le grand obstacle à la population est donc le manque de nourriture, provenant de la différence des rapports que suivent ces deux quantités dans leurs accroissements respectifs.

Quand une population, dans son développement, est parvenue au niveau de ses moyens de subsistance, elle doit s'arrêter à cette limite par la prévoyance des hommes ; ou si elle a le malheur de la franchir, elle s'y trouve forcément ramenée par un excès de mortalité.

Les obstacles à la population peuvent donc être rangés sous deux chefs. Les uns agissent en prévenant l'accroissement de la population, et les autres en la détruisant à mesure qu'elle se forme. La somme des premiers compose ce que l'on peut appeler l'obstacle privatif ; celle des seconds l'obstacle destructif. »

Quels arguments Quételet avance-t-il pour dire que la population ne peut pas croître indéfiniment ?

2. Voici l'évolution par tranche de 10 ans de la population des Etats-Unis depuis l'année 1800.

Population US de 1800 à 2010.

Année	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900
Pop (millions d'hab.)	5,31	7,24	9,64	12,87	17,07	23,19	31,44	38,56	50,19	62,98	76,21
Année	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Pop (millions d'hab.)	92,23	106,02	123,2	132,59	152,27	180,67	205,5	227,73	249,97	282,41	310,06

Justifier que le modèle de Malthus (taux d'accroissement

constant et égal à  $k$ ) s'applique bien jusqu'en 1860, mais qu'après il ne peut plus s'appliquer.

3. Pierre François Verhulst (27 octobre 1804 - 15 février 1849) est un mathématicien belge. Il considère que si la population peut se développer sans contrainte conformément au modèle de Malthus pendant une courte période d'« explosion démographique » ; les ressources n'étant pas inépuisables, la croissance de la population sera ensuite freinée et limitée. Verhulst va tester plusieurs modèles dont le plus simple consiste à rajouter un facteur retardateur du

type  $a(u_n - b)$  à la modélisation de Malthus, ce qui donne  $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = k - a(u_n - b)$ .

$b$  étant la population (dite normale) obtenue au moment du « décrochage » de la formule de Malthus et  $a$  un réel positif que l'on appellera coefficient retardateur.

a) Verhulst dit que « le taux d'accroissement diminue quand la population augmente ». Expliquer.

b) Ecrire  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  dans le modèle de Verhulst.

c) Déterminer, à l'aide d'un tableur, les valeurs de  $a$  et  $b$  de manière à ajuster au mieux les données.

d) Quelle est alors la valeur maximale (seuil) atteinte par la population américaine ?



La question 1 donne l'occasion de rediscuter de la modélisation proposée par Malthus et la question 2 de vérifier si une suite est géométrique.

Très rapidement, les élèves remarquent le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est constant pour les 7 premiers termes, mais qu'à partir du 8<sup>ème</sup>, le quotient diffère notablement.

population en million

	5,31	
1	7,24	0,36346516
2	9,64	0,33149171
3	12,87	0,33506224
4	17,07	0,32634033
5	23,19	0,35852373
6	31,44	0,35575679
7	38,56	0,2264631

La croissance de la population entre deux années  $n$  et  $n + 1$  ne peut pas être proportionnelle à la population de l'année  $n$  car, comme le montre le document de l'INED, la Terre ne pourrait pas nourrir la population et comme le dit Quételet, à un moment donné, le taux de mortalité dépassera le taux de natalité.

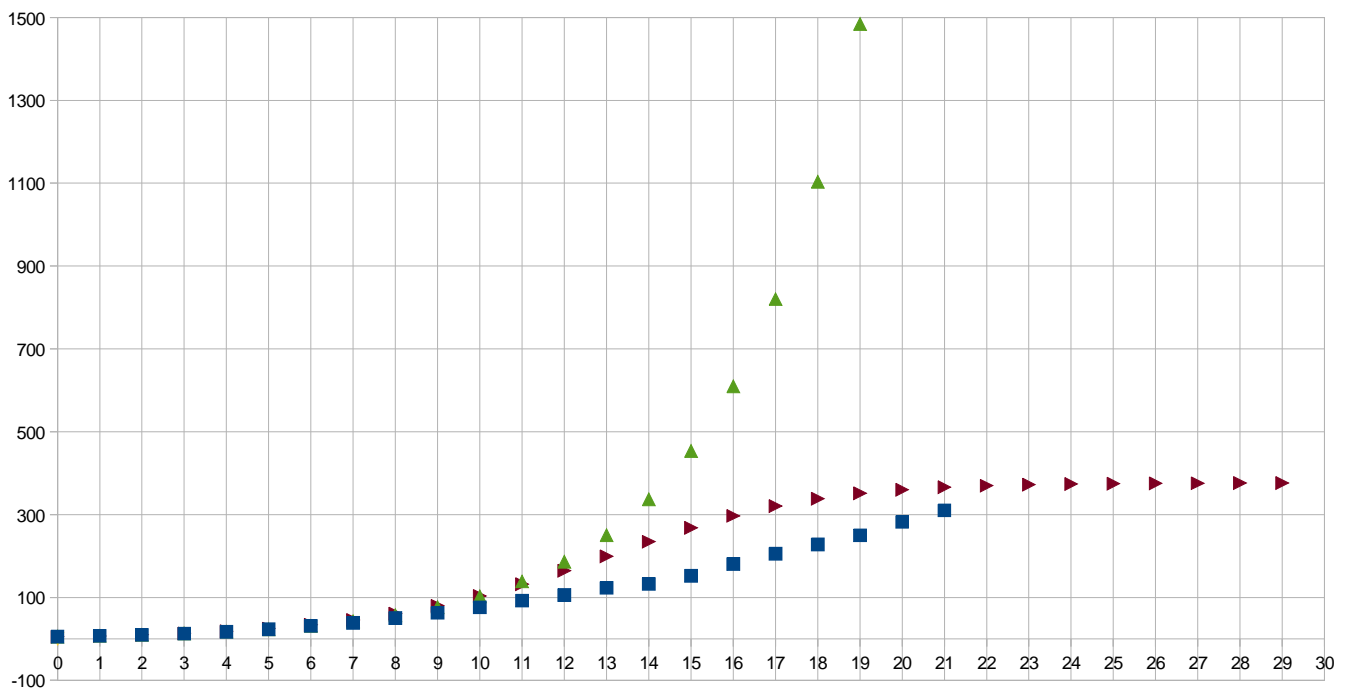
Il est donc nécessaire de modifier le modèle initial :  $u_{n+1} - u_n = ku_n$  soit  $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = k$ .

Pour cela, Verhulst (mathématicien belge du XIX<sup>e</sup> siècle) va tester plusieurs modèles et le plus adapté consiste à mettre un facteur retardateur :

$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = k - a(u_n - b)$ ,  $a$  étant une constante positive (à déterminer) et  $b$  la population dite normale (population au moment où le modèle de Malthus ne convient plus). Un retour rapide à la notion de fonction affine (et cette nouvelle formule) permet de comprendre que le taux d'accroissement  $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$  diminue quand la population augmente. ( $a > 0$  donc  $x \rightarrow k - a(x - b)$  est décroissante).

Pour des raisons de temps, ce nouveau modèle peut être testé sur tableur par le professeur devant les élèves. Différentes valeurs de  $a$  sont essayées jusqu'à ce que le nuage de points calculé par cette nouvelle formule « colle au mieux » avec le nuage de points de la population. Ce travail est l'occasion de débattre sur différentes modélisations et sur la différence entre modèle et réalité. Le modèle de Verhulst testé ne correspond pas parfaitement aux données de la population mais se rapproche bien mieux des données que le modèle de Malthus, qui très vite nous montre une très grande différence. On peut alors comparer ces différentes évolutions et évoquer la limite de chacune des deux suites. Cette notion reste intuitive mais elle permet cependant d'évoquer la valeur limite de la population mondiale.

population en million		k	MALTHUS	VERHULST	b	a
0	5,31	0,34	5,31	5,31	31,44	0,001
1	7,24		7,110567156	7,24931746		
2	9,64		9,521688377	9,88285343		
3	12,87		12,75039636	13,4470749		
4	17,07		17,07392647	18,2487939		
5	23,19		22,86352181	24,6774985		
6	31,44		30,61631021	33,2122696		
7	38,56		40,99799056	44,4153524		
8	50,19		54,89999343	58,8998431		
9	62,98		73,51602451	77,2548022		
10	76,21		98,44456297	99,9117088		
11	92,23		131,826116	126,949631		
12	106,02		176,5270153	157,872051		
13	123,20		236,3855362	191,444775		
14	132,59		316,5414745	225,729679		
15	152,27		423,8774788	258,415377		
16	180,67		567,6100337	287,387484		
17	205,50		760,0808405	311,281562		
18	227,73		1017,816546	329,724465		
19	249,97		1362,947816	343,179002		
20	282,41		1825,1096	352,565242		
21	310,06		2443,985759	358,898942		



En bleu les données expérimentales, en vert le modèle de Malthus, en rouge le modèle de Verhulst.

On peut alors faire figurer dans le cours des résultats généraux sur les suites (représentation graphique, variations et notion de limite). De nombreux exercices sont nécessaires pour bien travailler la notion de variation et maîtriser les différentes méthodes de démonstration.

A la fin de l'étude 3, on peut arriver à une suite dont le terme général s'écrit sous la forme  $u_{n+1} = (1 + k + ab - au_n)u_n = au_n \left( \frac{1}{a} + \frac{k}{a} + b - u_n \right)$ . Après un changement de variable on peut reconnaître une suite du type  $v = qv_n(1 - v_n)$  dont l'étude sur tableur va être l'objet de la fin du parcours. Suivant les valeurs de  $a$ , les élèves doivent calculer les premiers termes de cette suite, tracer la représentation graphique et remarquer les différences de variation obtenues.

### Travaux Pratiques :

On pose  $v_0 = a$  et  $v_{n+1} = qv_n(1 - v_n)$  où  $v_0$  est compris entre 0 et 1 et  $q$  compris entre 0 et 4.

1. On pose  $v_0 = 0,2$  et  $q = 1$ .

a) Calculer à l'aide de la calculatrice et du tableur les 5 premiers termes de la suite.

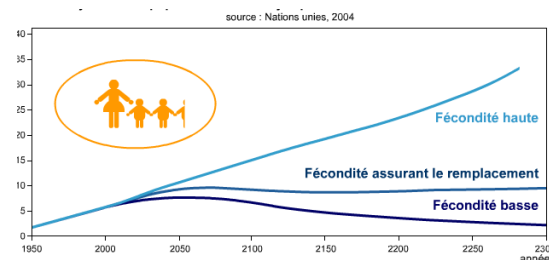
b) Vérifier que la suite n'est ni géométrique ni arithmétique.

c) Conjecturer le comportement de la suite quand  $n$  devient très grand.

2. Reprendre le même exercice avec  $v_0 = 0,2$  et  $q = 2$  puis avec  $v_0 = 0,2$  et  $q = 3$ .

3. Comment interpréter cela en termes de population ?

4. Peut-on expliquer la dernière partie de l'INED ?



A travers la question de l'évolution d'une population, on peut aborder une grande partie des contenus du programme sur les suites. Seule la somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique n'y a pas trouvé sa place<sup>1</sup>. Ce parcours a beaucoup intéressé les élèves, qui ont bien perçu la difficulté de la modélisation et son importance. Les mathématiques ont trouvé leur place dans une « question de la vie ».

Pour résumer ce parcours et notre méthode en général,

**Un postulat :** Toute connaissance est une réponse à une question.

**Une méthodologie :** Réorganiser les contenus des programmes en parcours où les notions sont des éléments de réponses à de « grandes questions », sur des énoncés issus autant que possible de situations du monde.

**Un objectif pédagogique :** Faire en sorte que, devant les grandes questions qui leur sont posées, les élèves acquièrent un certain niveau de compétences

<sup>1</sup> Il est possible de les travailler à l'occasion d'une autre question comme « Comment prévoir les annuités à payer lors d'un emprunt ? ».